複素多様体の分類問題 (代数多様体の分類 : 80年代へ)

AUTHOR(S):
上野, 健爾

数理解析研究所講究録
392巻 1980年 58-63

複素多様体の分類問題

京大 理　上野 健爾

代数多様体の分類には予想 $C_{n,m}$ の成否が大きな鍵になっている。$C_{n,m}$ はその予想が提出された当初から一般の複素多様体では成立しないことが判明していた。実はそれ以前に Blanchard [2] と Atiyah [1] が $C_{n,m}$ が成立しない non-Kähler 多様体を構成していた。彼らの例は，M 3次元複素多様体，C 非特異完備曲線，$f: M \to C$ 全射正則射で各点で f は smooth かつ f の各ファイバーは2次元複素トーラスであって $f_*\omega_{M/C}$ が C 上 negative になるものであった。もし M が Kähler であれば $f_*\omega_{M/C}$ は semi-positive になっていてこれが予想 $C_{n,m}$ の成立の鍵になっていた。従って一般の複素多様体を考える場合は事情は複雑であって，代数多様体の時の類似は必ずしも成立しないことになる。ここでは3次元複素多様体の時にその辺の事情をはっきりさせておこう。

さて上で non-Kähler と言ったけれど，Hodge 理論が使え

る場合もあるので藤木によって導入された $\mathcal{C}$ なる類を考えた方がよい。$\mathcal{C}$ は

$\mathcal{C}=\{M \mid M$ コンパクト複素多様体, M はあるコンパクトKähler多様体からの有理型写像の像 $\}$

として定義される。$\mathcal{C}$ に属する多様体はKähler多様体と類似の性質を持っている。

予想　代数多様体の分類理論で成立することは $\mathcal{C}$ に属する複素多様体でも成立する。

例えば abel 多様体の特徴づけ, $\kappa(M)=0$, $g_1(M)=\dim M$ $\Rightarrow$ M は abel 多様体と双有理同値は複素トーラスの特徴づけとして, $\mathcal{C}$ に属する複素多様体の中での議論に拡張するのは極めて容易である。しかし以下に示すように, $\mathcal{C}$ に属さない複素多様体 M (従って複素トーラスに双有理型には成り得ない) で $\kappa(M)=0$, $g_1(M)=\dim M$ なるものは沢山存在する。

§1. ファイバー空間に対する κ の不等式.

分類理論では $C_{n,m}$ の成立を示すことが重要であった。現在しられている $C_{n,m}$ が成立する時の証明は, $\varphi: X \to Y$ に対して X が $\mathcal{C}$ に属していればそのまま拡張することができる。しかし $\mathcal{C}$ に属さないからといって必ずしも $C_{n,m}$ が成立しないわけでもなく, その辺の事情は底空間 Y の性質

とも関連して複雑である。

<u>定理</u> $C_{n,n-1}$ は常に成立する。($\mathbb{C}$ に属さなくてもよい)

$\varphi: X \longrightarrow Y$ に対して φ の一般ファイバーが genus $g \geq 2$ の曲線の時は 射 φ は 双有理型に射影射であるので Viehweg の論法を使うこともできるし、別証明を与えることもできる。またファイバーが楕円曲線である時は 正則ファイバーの部分の構造が分かっているので、保型形式を使って $H^0(X, mK_{X/Y})$ の元を構成することができ、$C_{n,n-1}$ が証明できる。

次に一番簡単で non trivial な $C_{3,1}$ を考えてみよう。

<u>定理</u> $\varphi: X^3 \longrightarrow Y^1$ に対して φ の一般ファイバーが 2次複素トーラス, K3曲面, Enriques曲面と双有理型同値でなければ $C_{3,1}$ が成立する。

この定理に関連して、φ のファイバーが(2次元)複素トーラス, K3曲面の時は $C_{3,1}$ (トーラスの時は $C_{n,m}$ でよい, 但し $n \geq m+2$) が成立しない例が構成できるが、Enriques曲面の時は、このような例が存在するかどうか分からない。

定理の証明は φ の一般ファイバーの κ に応じて証明を変える。$\kappa = 2$ の時は X は Moishezon となり Viehweg の証明が使える。$\kappa = 1$ の時は

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\Psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{P}(\varphi_*(K_{X/Y}^{\otimes m})) \arrow[dl] \\ Y & \end{tikzcd}$$

なる $\psi : X \longrightarrow \mathbb{P}(\varphi_*(K_{X/Y}^{\otimes m}))$ 有理型写像が存在し，$\psi(X)=S$ は曲面，しかも $\psi_x = \psi|_{\varphi^{-1}(x)}$ は $\Phi_{mK_{\varphi^{-1}(x)}}$ と双有理型同値となり，$\psi : X \longrightarrow S$ は一般ファイバーが楕円曲線となるファイバー空間と双有理型同値となり，楕円ファイバー空間の理論が使える。$K=0$ の時は超楕円曲面もしくは $K=1$ となる小平曲面と双有理型同値の時であるが，この時は Albanese map を relative にして考えて，$K=1$ の時と同様な場合に帰着される。

このようにしてほとんどの場合 $C_{3,1}$ が成立することが分かる。一般の場合も類似のことが成立すると思われ，$C_{n,m}$ が成立しない時のファイバーには特殊な複素多様体が現われると予想される。更に空想をたくましくするならば，この特殊な多様体は $K=0$ なる多様体から何らかの方法で構成できると思われる。

§2. $K \leq 0$ なる3次元複素多様体

前節の結果を使うと $K \leq 0$ なる3次元複素多様体で，Albanese torus が non trivial の時にはその構造をかなり詳しく調べることができる。$t(M)$ を M の Albanese torus の次元とする。

<u>主定理1</u>. M は3次元複素多様体で $K(M)=0$，$t(M) \geq 1$ とする.

i) もし Albanese 写像 $\alpha : M \longrightarrow A(M)$ が全射であれば，

αのファイバーは連結であり、次の性質を有す。

a) $t(M)=3$ であれば α は双有理型。従って特に $M\in\mathcal{C}$.

b) $t(M)=2$ であれば $\alpha: M \longrightarrow A(M)$ は $A(M)$上の楕円曲線をファイバーとするファイバー束と双有理型同値。この時，M は $\mathcal{C}$ に属することも属さないこともある。

c) $t(M)=1$ であれば $\alpha: M \longrightarrow A(M)$ の一般ファイバーは $\kappa=0$ なる曲面となる。更に $M\in\mathcal{C}$ であれば $\alpha: M \longrightarrow A(M)$ は $A(M)$ 上の $\kappa=0$ なる Kähler 曲面のファイバー束と双有理型同値。しかし $M\notin\mathcal{C}$ の時は必ずしもファイバー束と双有理型同値とはならない。(ファイバーが2次元複素トーラス，K3曲面の時に例がある)。

2) Albanese map が全射でない時。$\alpha(M)=C$ は非特異完備曲線であり genus $g\geq 2$ となり，$\alpha: M \to C$ のファイバーは連結である。更に α の一般ファイバーは 2次元複素トーラス，K3曲面，Enriques 曲面のいずれかと双有理型同値である。しかも 2) の場合には常に $M\notin\mathcal{C}$ であり，C の種数は 2 以上の任意の値をとり得る。

主定理 2. M は 3次元複素多様体で $\kappa(M)=-\infty$, $t(M)\geq 1$ とする。この時 $\dim \alpha(M)\leq 2$.

1) $\dim \alpha(M)=2$ の時。
$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(M) \\ & {\scriptstyle\beta}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\gamma} & \\ & W & \end{array}$$
を α の Stein分解

とすると，$\beta: M \to W$ の一般ファイバーは $\mathbb{P}_1$ である．

2) $\dim \alpha(M) = 1$ とすると $\alpha(M) = C$ は非特異完備曲線であり，$\alpha: M \to C$ のファイバーは連結，かつ α の一般ファイバーは $\kappa = -\infty$ なる曲面もしくは複素トーラス，K3曲面，Enriques 曲面に双有理型同値．もし $M \in \mathcal{C}$ であれば α の一般ファイバーは ruled surface である．

文献

[1] M. F. Atiyah. Some examples of complex manifolds. Bonn. Math. Schriften 6 (1958)

[2]. A. Blanchard. Sur les variétés analytiques complexes. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 73 (1958), 157–202.

[3] K. Ueno. On three-dimensional compact complex manifolds with non positive Kodaira dimension, to appear.